

МЕХАНИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ
ПРИ СЛЕДЯЩЕМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ СИЛЫ В ОБЛАСТИ
БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ХАН. Б. МАМЕДОВ

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

Настоящая работа посвящена расчёту гибких упругих стержней при следящем перемещении силы в области больших перемещений, когда сила P остаётся всё время перпендикулярной к упругой линии изгибаемого стержня. При этом угол γ наклона силы к неподвижной оси x постепенно уменьшается от 90° , переходя через нулевое значение и становясь затем отрицательным. В момент перехода угла γ через значение $\gamma=0$, получается, в частности, форма продольного изгиба.

В настоящее время использование ЭВМ открыло новые возможности в разработке методов исследования деформации элементов конструкций и сооружений. Появились работы с более точными решениями ряда задач, решения которых прежде считались недоступными инженерам из-за их сложности. К ним относятся задачи расчёта упругих гибких стержней в области больших перемещений.

Задачи исследования больших упругих перемещений тонких стержней в плоскости и в пространстве весьма интересны в прикладном аспекте. Этот факт обусловлен тем обстоятельством, что нелинейные дифференциальные уравнения равновесия упругой линии тонких стержней (при больших перемещениях в пространстве и в плоскости) совпадают с нелинейными уравнениями движения абсолютно твёрдого тела (тоже при больших перемещениях) [2].

Упругие стержни имеют очень широкое применение в различных областях техники: в различных родах машин, строительных конструкциях и приборах. Наиболее распространено применение таких элементов в акселерометрах и частотных датчиках, механических низкочастотных фильтрах – в электронной технике, а также в качестве аккумуляторов механической энергии. Приборы времени, использующие гибкие упругие стержни, получили распространение не только как часы, но и как датчики стабильных сигналов в различных устройствах автоматики наземной и космической техники. Определение значения текущего времени и измерение временных интервалов необходимы при решении задач управления механическими объектами в авиации и в космических исследованиях. Показания приборов времени в большей степени зависят от точности расчёта упругого элемента с учётом реальных условий его эксплуатации [3]. В связи с этим весьма актуальной является задача определения больших перемещений

элемента конструкции, когда в процессе деформации сильно изменяется первоначальная конфигурация, причём перемещения при этом становятся сравнимыми с длиной самого элемента конструкции.

Полную систему расчётных уравнений для деформационного элемента плоского стержня можно получить из уравнений Г.Кирхгофа [1], или из непосредственного рассмотрения элемента стержня (рис. 1,б). Они имеют вид [4]:

$$\chi \frac{dM}{d\varphi} - Q = 0, \quad \frac{dN}{d\varphi} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{d\varphi} + N = 0 \quad (1)$$

Заметим, что каждое состояние упругой линии здесь соответствует некоторому случаю продольно-поперечного изгиба, но с неизвестным углом γ . Эти неизвестные определяются в результате расчёта очертания упругой линии изогнутого стержня.

Для изогнутого упругого стержня в принятой системе координат воспользуемся известным точным уравнением упругого равновесия при плоском изгибе первоначального прямого стержня в виде [2]:

$$\chi = -\frac{M}{B} \quad (2)$$

Известно, что при выводе формулы Эйлера не удавалось найти численного значения прогиба стержня, так как величина постоянной интегрирования оставалась неопределённой. Это обстоятельство связано с тем, что изогнутая ось стержня была описана приближённым дифференциальным уравнением [8]. Если использовать для этих целей точное дифференциальное уравнение изогнутой оси, то можно определить как критическую силу, так и зависимость между сжимающей силой и прогибом стержня [9]. Поэтому будем использовать точное выражение кривизны, которое определяется посредством формулы

$$\chi = \pm \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}, \quad (3)$$

в то время как в линейной теории изгиба стержня ввиду малости угловых перемещений упругой линии обычно принимается [10]:

$$\chi = \pm y''$$

Кривизна χ в данной точке упругой линии считается положительной, если угол наклона касательной y упругой линии увеличивается с увеличением длины дуги S , если наоборот – кривизна будет отрицательной.

Решая совместно уравнения (1), (2) и (3) и интегрируя их, и переходя на безразмерные величины для N , Q , M , χ , x и y , получим следующие выражения [5].

$$\begin{aligned} n &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, & g &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi \\ m &= \tilde{\chi} / \tilde{P}, & \chi &= (C_3 - 2\tilde{P} \cdot n)^{1/2} \\ \tilde{x} + C_4 &= \int \frac{\cos \varphi}{\chi} d\varphi, & \tilde{y} + C_5 &= \int \frac{\sin \varphi}{\chi} d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

где χ – кривизна после деформации, $B = EJ$ – жёсткость при изгибе; M , N , Q – внутренние силовые факторы; $d\varphi$ – центральный угол деформированного эле-

мента; $y' = dy/dx = \operatorname{tg}\varphi$; y, x – координаты центра сечения деформированного элемента; $n = N/P$; $g = Q/P$; $m = M/P$; $\tilde{\chi} = \chi \cdot l$; $\tilde{x} = x \cdot l$ $\tilde{y} = y \cdot l$; C_i ($i = 1 \div 5$) – произвольные постоянные, определяющиеся из граничных условий; $\tilde{P} = Pl^2/B$ – безразмерная величина сосредоточенной силы; l – начальная длина прямого стержня.

Для рассматриваемой задачи выпишем следующие граничные условия (рис. 1, б).

$$\begin{aligned} \text{При } \varphi = 0, \quad Q(\varphi) = P \cos \theta, \quad N(\varphi) = -P \sin \theta, \quad x(\varphi) = y(\varphi) = 0, \quad \text{а} \quad (5) \\ \text{при } \varphi = \theta, \quad M(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Раскрывая условия (5), получим:

$$C_1 = -\sin \theta; \quad C_2 = \cos \theta; \quad C_3 = 0.$$

Таким образом, для $n, g, m, \tilde{\chi}$ получим следующие выражения:

$$n(\varphi) = -\sin(\theta - \varphi), \quad g(\varphi) = \cos(\theta - \varphi)$$

$$m(\varphi) = (2/\tilde{P})^{1/2} \cdot [\sin(\theta - \varphi)]^{1/2}$$

$$\chi(\varphi) = (2\tilde{P})^{1/2} \cdot [\sin(\theta - \varphi)]^{1/2}$$

Используя третье условие (5), из пятого уравнения системы (4) имеем:

$$C_4 = (2\tilde{P})^{-1/2} \left\{ \int [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} \cos \varphi \, d\varphi \right\}_{\varphi=0},$$

а также, при $\varphi = \theta$, $\tilde{x}(\theta) = \tilde{x}_A$

$$\tilde{x}_A + C_4 = (2\tilde{P})^{-1/2} \left\{ \int [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} \cos \varphi \, d\varphi \right\}_{\varphi=\theta}.$$

Обратно, используя метод Ньютона-Лейбница, из последних двух уравнений следует:

$$\tilde{x}_A = (2\tilde{P})^{-1/2} \int_0^\theta [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} \cos \varphi \, d\varphi.$$

При этом для \tilde{y}_A получим:

$$\tilde{y}_A = (2\tilde{P})^{-1/2} \int_0^\theta [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} \sin \varphi \, d\varphi$$

Итак, для параметров $n, g, m, \tilde{\chi}, \tilde{x}$ и \tilde{y} в характерных сечениях, имеем:

$$n(0) = -\sin \theta, \quad g(0) = \cos \theta, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{y}(0) = 0 \quad \text{при } \varphi = 0$$

$$m(0) = \left(\frac{2 \sin \theta}{\tilde{P}} \right)^{1/2}, \quad \tilde{\chi}(0) = (2\tilde{P} \sin \theta)^{1/2}$$

$$n(\theta) = 0, \quad g(\theta) = 1, \quad m(\theta) = \tilde{\chi}(\theta) = 0 \quad \text{для } \varphi = \theta$$

$$\tilde{x}_A = (2\tilde{P})^{-1/2} \int_0^\theta [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} \cos \varphi d\varphi$$

$$\tilde{y}_A = (2\tilde{P})^{-1/2} \int_0^\theta [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} \sin \varphi d\varphi$$

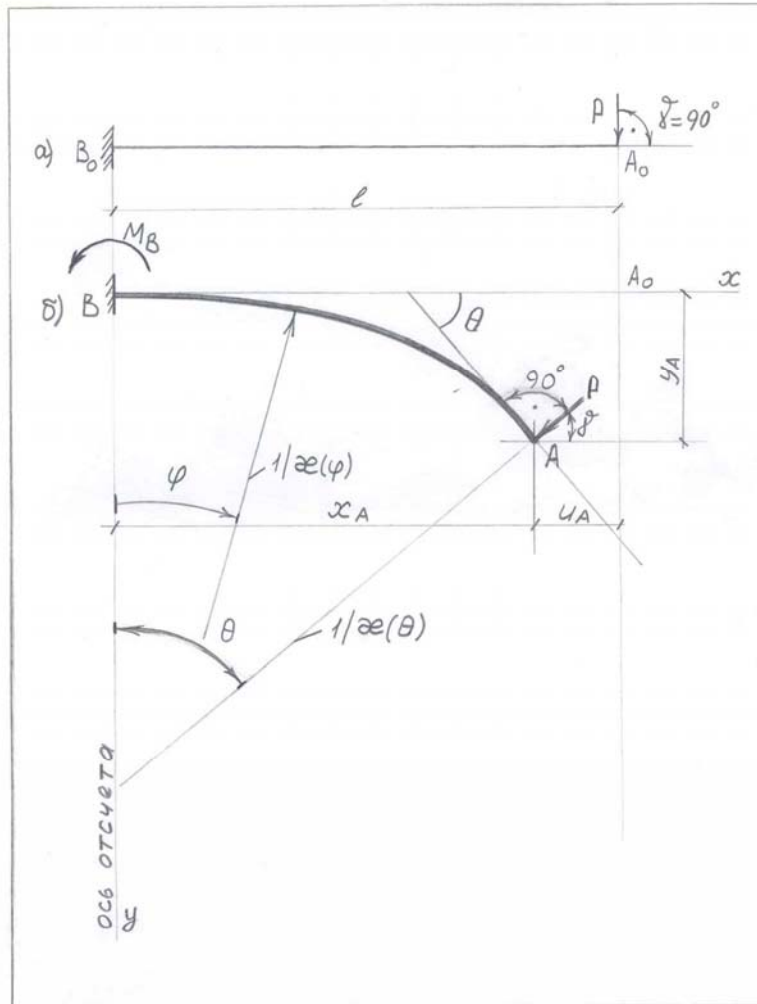


Рис. 1

Для того, чтобы связать начальные и деформационные параметры, используем условия нерастяжимости, причём на участке интегрирования не должно быть точек перегиба, где меняется знак кривизны [7]:

$$\int_0^{\theta} \tilde{\chi}_{(\varphi)}^{-1} d\varphi = 1$$

$$\int_0^{\theta} [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} d\varphi = (2\tilde{P})^{1/2}$$

или

$$\tilde{P} = 0,5 \cdot \left\{ \int_0^{\theta} [\sin(\theta - \varphi)]^{-1/2} d\varphi \right\}^2 \quad (6)$$

откуда

Задавая θ , из уравнений (6) определяем \tilde{P} , после чего можно вычислить любые искомые внутренние усилия, а также перемещения. Полученные результаты даны в таблице (табл.1) и в виде графика (рис.2). В момент перехода угла γ через значение $\gamma = 0$, получается форма продольного изгиба [6].

Таблица 1

θград	$\tilde{P} (Pl^2 / EJ)$	M : Pl	x : l	y : l
		φ	φ = θ	
5.0	0.1564	1.0557	0.9981	0.0565
10.0	0.3235	1.0361	0.9922	0.1137
15.0	0.4931	1.0246	0.9823	0.1703
20.0	0.6645	1.0146	0.9686	0.2262
25.0	0.8377	1.0045	0.9510	0.2808
30.0	1.0128	0.9936	0.9297	0.3339
45.0	1.5524	0.9545	0.8453	0.4811
60.0	2.1192	0.9040	0.7343	0.6048
75.0	2.7237	0.8422	0.6034	0.6992
90.0	3.3799	0.7692	0.4608	0.7692
100.0	3.8555	0.7147	0.3638	0.7825
110.0	4.3708	0.6557	0.2684	0.7890
120.0	4.9367	0.5923	0.1776	0.7806
130.0	5.5693	0.5245	0.0942	0.7583
140.0	6.2928	0.4520	0.0212	0.7234
145.0	6.7004	0.4138	-0.0104	0.7016
150.0	7.1481	0.3740	-0.0380	0.6774
155.0	7.6471	0.3325	-0.0611	0.6507
160.0	8.2145	0.2886	-0.0789	0.6219
170.0	9.6968	0.1892	-0.0928	0.5577
175.0	10.8120	0.1270	-0.0812	0.507
175.9	11.0737	0.1137	-0.0765	0.5133
179.91	13.3368	0.0155	-0.0139	0.4640

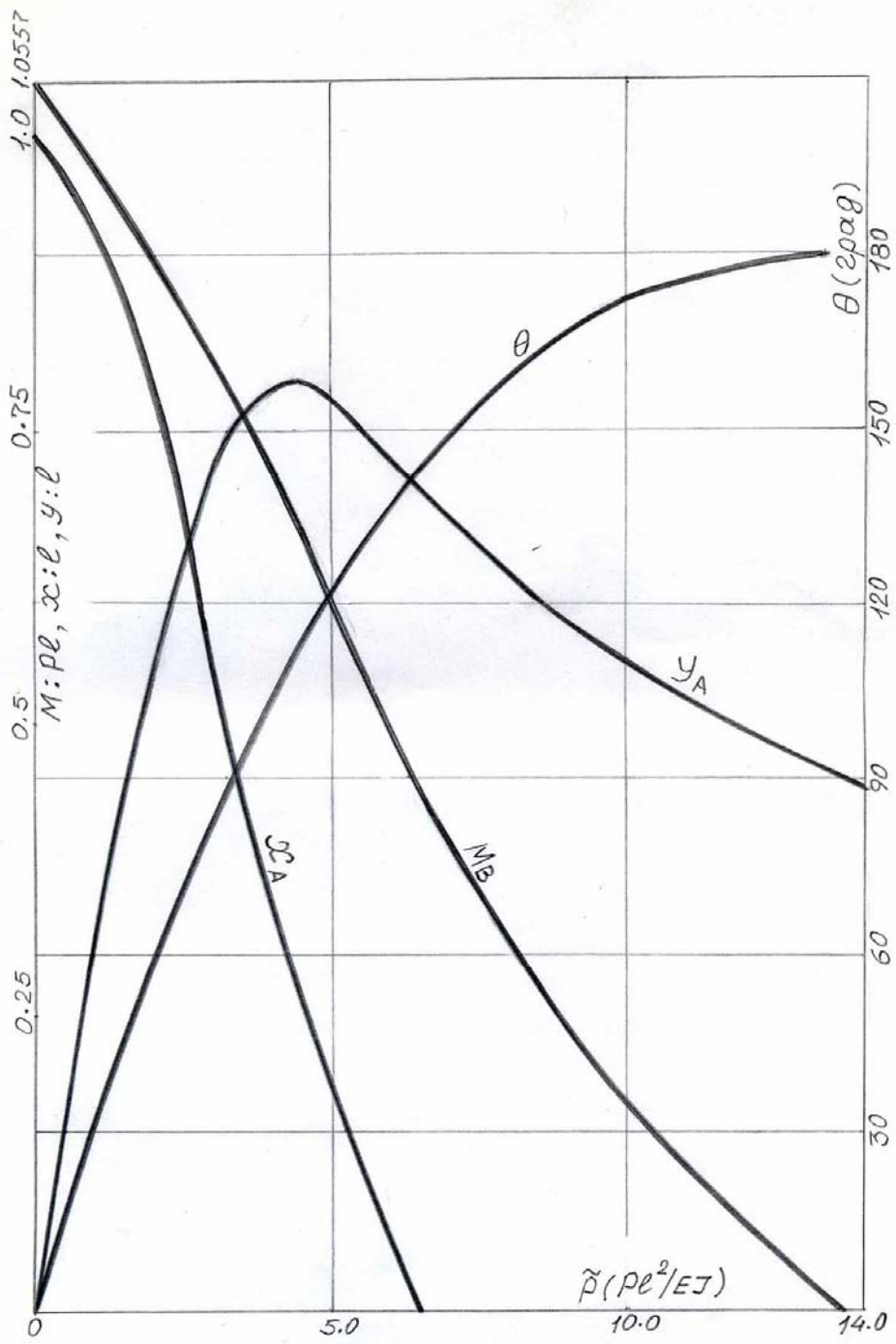


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirchoff G. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dunnen elastischen Stabes. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Berlin), 1859, Bd 56 №4, ss. 285 – 313; см, также Kirchoff G. Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik. – Leipzig: B.G. Teubner, 1876, 466 s; Русский перевод: Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: изд. АН СССР, 1962, 402 с.
2. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней, М.: Наука, 1986, 296 с.
3. Светлицкий В.А. Механика стержней: ч. 1, Статика, Москва, Высшая школа, 1987, 320 с.
4. Аббасов У.М., Мамедов Х.Б. Расчет двухшарнирного кольца от симметричной нагрузки в области больших перемещений, Исследования по строительной механике пространственных систем, Москва: УДН, 1990, с. 18 – 23.
5. Мамедов Хан.Б. Изгиб упругого кольца с внутренними шарнирами при больших перемещениях, Вестник. БГУ, серия физико-математических наук, 2002 г., № 3, стр. 132–141.
6. Мамедов Хан.Б., Юнусов Я.К. Исследование продольного изгиба консольного стержня в области больших перемещений. Сборник научных трудов по механике № 7, часть II, Баку: Элм, 1997, с. 165–172.
7. Мамедов Хан.Б. Об изгибе упругого стержня сосредоточенной силой при больших перемещениях. Вестник, БГУ, серия физико-математических наук, 2002 г., № 4, стр. 146–152.
8. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. Перевод с английского языка, М.: 2006, 536 с.
9. Александров А.В. Сопротивление материалов. 13-ое издание, М.: 2004, 591 с.

KONSOL MİLLƏRİN ƏYİLMƏSİNİN BÖYÜK YERDƏYİŞMƏLƏR OBLASTINDA ARAŞDIRILMASI

XAN. B.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalə elastik çevik konsol millərin əyilməsinin böyük yerdəyişmələr oblastında araşdırılmasına həsr edilib. Bu zaman P qüvvəsi əyilən milin oxuna istənilən anda perpendikulyar istiqamətdə qalır. Əyilmə zamanı qüvvənin tərpənməz x oxuna nəzərən γ maillik bucağı tədricən 90° -dən azalır, 0 qiymətindən keçərək mənfi qiymət alır. γ bucağının 0 -dan keçən anında xüsusi hal kimi boyuna əyilmə alınır.

THE INVESTIGATION OF THE BEND OF CANTILEVER BAR AT TRACKING DISPLACEMENT OF FORCE IN THE DOMAIN OF BIG DISPLACEMENTS

KHAN. B. MAMMEDOV

SUMMARY

The present paper is devoted to calculation of flexible elastic bars at the tracking displacement of force in the domain of big displacements. When force P is constantly perpendicular to the elastic curve of flexible bar. At that angle γ of slope of the force with respect to the immovable axis X is gradually decreasing from 90° to 0° , passing 0° and becoming negative. At the moment, when angle passes through $\gamma = 0$, particularly, the shape of lateral deflection (bend) is obtained.